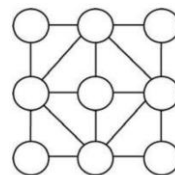


II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2018 рік

6 клас

1. У 100 пакетах лежать 2018 цукерок, причому немає двох пакетів з однаковим числом цукерок і немає порожніх пакетів. При цьому деякі пакети можуть лежати в інших пакетах (Тоді вважається, що цукерка, що лежить у внутрішньому пакеті, лежить і в зовнішньому). Доведіть, що в якомусь пакеті є пакет з пакетом всередині.
2. На дошці записано натуральне число. Кожну хвилину з ним роблять наступну операцію: якщо в ньому є дві однакові цифри, то витирають будь-яку з них; якщо ж всі цифри різні, то витирають все число і замість нього пишуть втричі більше число. Наприклад, з числа 57 можна за дві хвилини отримати $57 \rightarrow 171 \rightarrow 71$ або $57 \rightarrow 171 \rightarrow 17$. Марія написала двозначне число і через кілька хвилин знову отримала його ж. Наведіть приклад, як вона могла це зробити

3. Числа від 1 до 9 необхідно розмістити в кружечках фігури так, щоб сума чотирьох чисел, що знаходяться в кружечках - вершинах всіх квадратів (їх 6), була постійною.



4. В симфонічний оркестр взяли на роботу трьох музикантів: Бориса, Семена і Василя, які вміють грати на скрипці, флейті, альті, кларнеті, гобої і трубі. Відомо що:

- 1) Семен найвищий;
- 2) той хто грає на скрипці менший зростом за того хто грає на флейті;
- 3) той хто грає на скрипці і флейті та Борис люблять борщ;
- 4) коли між альтистом і трубачем виникає сварка, Семен мирить їх;
- 5) Борис не вміє грати ні на гобої, ні на трубі.

На яких інструментах грає кожен з музикантів, якщо кожен володіє тільки двома інструментами?

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами

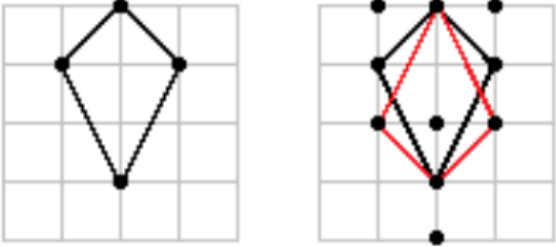
Час розв'язання 3 год.

Користування калькуляторами заборонено

м. Ужгород

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2018 рік

7 клас

1. Яке з чисел більше $2^{5^4^3}$ чи $3^{4^2^5}$?
2. Шестизначне число $\overline{6x62y4}$ ділиться на 11, а при діленні на 9 дає остачу 6. Знайти остачу при діленні даного числа на 13.
3. Петрик малює точки на перетині ліній. Йому подобається, якщо чотири точки утворюють фігуру «повітряний змій», показану справа («повітряний змій» повинен бути саме такої форми і розміру, але може бути повернутий у чотирьох напрямках). Наприклад, 10 точок, показані на другому малюнку, утворюють всього два «повітряні змії». Чи можна намалювати кілька точок так, щоб кількість «повітряних зміїв» була більшою, ніж кількість самих точок?
4. На дошці записані числа від 1 до 2018. Двоє гравців по черзі викреслюють по одному числу. Гра закінчується, коли на дошці залишаються два числа. Якщо їх сума не ділиться на 3, то перемагає той, хто робить перший хід, а в іншому випадку той, хто робить другий хід. Хто виграє при правильній грі? Відповідь обґрунтуйте.
5. Серед 11 зовні однакових монет 10 справжніх, що важать по 20 грам і одна фальшива, яка важить 21 грам. Є чашкові ваги, які виявляються в рівновазі, якщо вантаж на правій чашці рівно вдвічі важчий, ніж на лівій. Якщо вантаж на правій чашці менший, ніж подвоєний вантаж на лівій, то переважає ліва чашка, якщо більший, то переважає права чашка. Як за допомогою трьох зважувань на цих вагах знайти фальшиву монету?

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено

м. Ужгород

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2018 рік

8 клас

1. Сума двох натуральних чисел дорівнює 2018. Якщо у одного з них закреслити останню цифру, то вийде друге число. Знайти всі такі числа.
2. Обчислити $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 2017^2 - 2018^2$.
3. В опуклому чотирикутнику ABCD сторони BC і AD паралельні, а сторони AB і CD не паралельні, бісектриса кута ABC перетинає відрізок MN, що з'єднує середини не паралельних сторін в точці E, а сторону AD в точці F. Знайти величину кута AEF.
4. Бібліотекар фізико-математичного ліцею помітила, що якщо кількість підручників з геометрії в шкільній бібліотеці збільшити у кілька разів (у ціле ненульове число) і додати до отриманого числа кількість підручників з алгебри, то утвориться число 2018. А якщо кількість підручників з алгебри збільшити в стільки ж разів і додати до отриманого числа кількість підручників з геометрії, то утвориться число 2027. Скільки підручників з алгебри в бібліотеці?
5. Доведіть, що число $11^{8n+4} + 4$ складене.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами

м. Ужгород

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2018 рік

9 клас

1. Довести, що якщо сума і добуток раціональних чисел є цілими числами, то ці числа є цілими.
2. Розв'яжіть нерівність $7 - 6(7 - 6(7 - \dots 6(7 - 6x)) \dots) > x$, якщо відомо, що кількість правих дужок дорівнює 2018.
3. У паралелограмі ABCD точки M і N середини сторін BC і CD відповідно. Чи можуть промені AM і AN ділити кут BAD на три рівні частини? Відповідь обґрунтуйте.
4. Петрик і Вася грають в гру. У них є смужка з 9 клітинок. Кожним ходом гравець вписує будь-яку цифру в будь-яку вільну клітинку. Ходять по черзі. Починає Петрик. Якщо в кінці гри отримане число виявиться точним квадратом, то виграє Петрик, інакше Вася. При цьому вони вважають, що число може починатися з одного або декількох нулів. У кого з гравців є вигрешна стратегія? Відповідь обґрунтуйте.
5. Яку максимальну кількість чисел можна вибрати з множини чисел $\{1, 2, \dots, 12\}$ таким чином, щоб добуток жодних трьох з обраних чисел не був точним кубом?

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами

м. Ужгород

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2018 рік

10 клас

1. Розв'язати рівняння $\sqrt{7-x^2+6x}+\sqrt{6x-x^2}=7+\sqrt{x(3-x)}$
2. Правильний 2019 - кутник розбитий на трикутники діагоналями, які не перетинаються всередині нього. Доведіть, що серед них є рівно один гострокутний трикутник.
3. Катер і корабель рухаються рівномірно і прямолінійно в один і той же порт. У початковий момент часу катер, корабель і порт утворюють рівносторонній трикутник. Коли катер проплив 36 км, корабель, катер і порт стали утворювати прямокутний трикутник, а коли катер прибув у порт, то кораблю залишалося до порту 40 км. Визначте відстань між кораблем і катером у початковий момент часу.
4. Дано трикутник ABC з кутом B, який дорівнює 120° . Відрізки AA₁, BB₁, CC₁ - бісектриси кутів трикутника ABC. Доведіть, що трикутник A₁B₁C₁ прямокутний.
5. Квадрат 10×10 розрізали на прямокутники, площі яких є різними натуральними числами. Яке найбільше число прямокутників може утворитися? Відповідь обґрунтуйте.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами

м.Ужгород

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено

II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2018 рік

11 клас

1. Функція $y=f(x)$ - парна, її областю визначення є вся множина дійсних чисел. Відомо, що рівняння $f(x) = 2018$ має 11 різних коренів. Знайдіть $f(0)$. Відповідь обґрунтуйте.
2. Нехай M - множина точок площини з координатами (x;y) таких, що числа 3x, 2y і 9-y є довжинами сторін деякого трикутника. Побудуйте фігуру M і знайдіть її площу.
3. Знайдіть значення виразу
$$\sqrt{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 6 \cdot 9 + \dots + n \cdot 2n \cdot 3n}{2 \cdot 3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 \cdot 8 + 6 \cdot 9 \cdot 12 + \dots + 2n \cdot 3n \cdot 4n}}$$
4. У трикутнику KLM з кутом L, який дорівнює 120° , проведені бісектриси LA і KB кутів KLM і LKM відповідно. Знайдіть величину кута KBA.
5. Скільки існує трійок натуральних чисел (a, b, c), що утворюють арифметичну прогресію ($a < b < c$), для яких числа $ab + 1$, $bc + 1$ і $ca + 1$ є точними квадратами? Відповідь обґрунтуйте.

Кожне завдання оцінюється 7-ма балами

м.Ужгород

Час розв'язання 4 год.

Користування калькуляторами заборонено